Propunător: Ildegez Mihaela-Corina
Colegiul Național de Informatică *Spiru Haret* Suceava

# Lecția 1: Definiții. Memorare.

## Noțiuni teoretice. Definiții

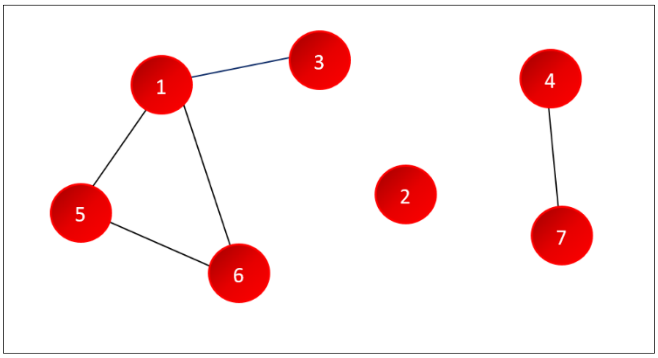
**Graf neorientat** - se numește graf neorientat **G**, o colecție de două mulțimi **G={X,U}**, unde **X** reprezintă mulțimea nodurilor iar **U** se numește mulțimea muchiilor. Cele două mulțimi sunt ambele finite. De regulă vom nota cu **n** numărul de noduri și cu **m** numărul de muchii.

**Muchie** - este linia care unește două noduri dintr-un graf, si care reprezintă relația existentă între noduri.

**Noduri adiacente** – două noduri unite cu o muchie

**Muchie incidentă** – muchia care unește două noduri, care se numesc extremități.

**Exemplu 1:**




Graf neorientat G are:

- mulțimea nodurilor **X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}**
- mulțimea muchiilor **U={(1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (1,6), (6,1), (5,6), (6,4), (4, 7), (7,4) }**
- **n=7** noduri
- **m=5** muchii
- în nodul **1** sunt incidente **3** muchii: **(1,3), (1,6), (1,5)**

**Gradul unui nod** – numărul de muchii incidente în nodul respectiv. Vom nota gradul nodului i nod cu **grad(i),** pentru oricare valoare i=$\overline{1,n}$. Gradul unui nod poate fi:

$$\boxed{0 \le grad(i) \le n-1, pentru\ oricare\ nod\ i = \overline{1,n}}$$

**Nod izolat** – un nod care are **gradul 0**.

**Nod terminal** – un nod care are **gradul 1**.

**Nod oarecare** – un nod care are gradul mai mare sau egal cu 2.

**Teoremă**: Într-un graf neorientat cu **n** noduri și **m** muchii **suma gradelor tuturor nodurilor este egal cu dublul numărului de muchii**.(fiecare muchie contribuie cu câte o unitate la gradul fiecărui nod incident cu muchia respectivă)

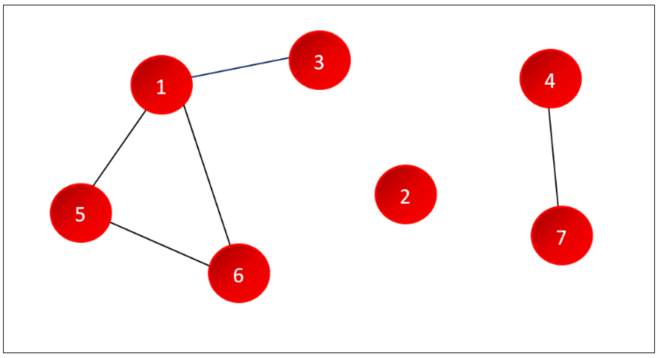
| grad(1) + grad(2) + ... + grad(n) = 2*m |
|---|

**Consecință** 1 – într-un graf neorientat G cu **n** noduri si **m** muchii **numărul nodurilor de grad impar este întotdeauna un număr par**.

**Consecință 2** - într-un graf neorientat G cu **n** $\ge$ 2 noduri vor exista întotdeauna **cel puțin două noduri cu același grad.**

**Observație importantă:** Un graf neorientat poate avea **0 muchii**, caz în care avem **n noduri izolate**, dar **nu poate avea 0 noduri**.

Exemplu 2:

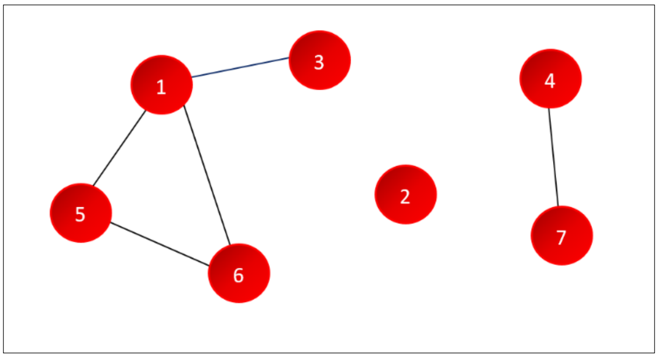



| Nod | Grad |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 2 |
| 6 | 2 |
| 7 | 1 |

- suma gradelor este 10
- avem 4 noduri de grad impar: 1, 3, 4, 7
- nodul 2 este nod izolat
- nodurile 3, 4, 7 sunt noduri terminale
- nodul 1 are grad maxim

**Șir grafic** – șirul gradelor tuturor celor n noduri. Vom utiliza un vector, notat **grad**, care va avea **n** elemente. Fiecare element din acest vector va memora gradul unui singur nod.

Exemplu 3:



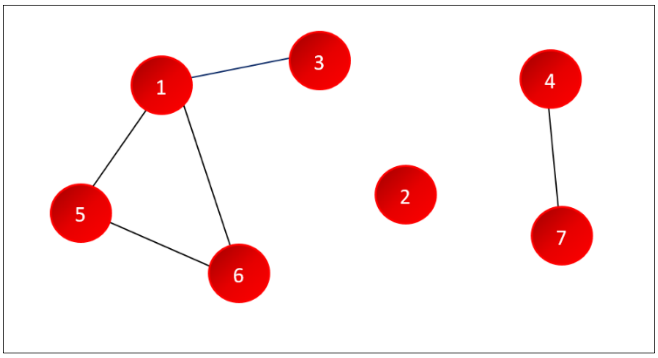

| Șir grafic | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nod: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Grad: | 3 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |

## Memorarea grafurilor

**Matricea de adiacență** – este o matrice pătratică, care are **n** linii și **n** coloane. Fiecare element din matrice poate avea următoarele valori:

$$a[i][j] = \begin{cases} 0, \textit{dacă nu există muchie între nodul i și nodul j} \\ 1, \textit{dacă există muchie între nodul i și nodul j} \end{cases}$$

Exemplu 4:




Matricea de adiacență

| Nod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Gradul nodului 5

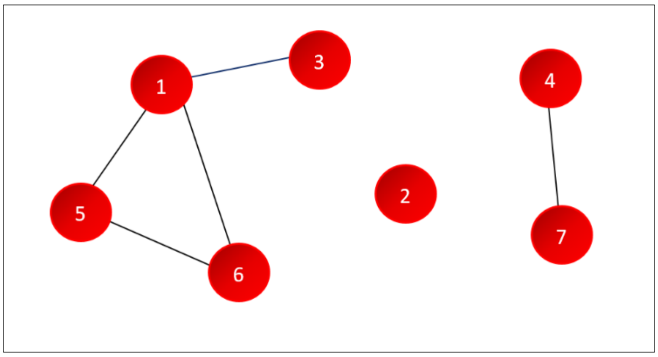
Observații importante:

- Matricea de adiacență în cazul grafurilor neorientate este simetrică față de diagonala principală.
- **Numărul de muchii** – este egal cu numărul valorilor de 1 aflate deasupra diagonalei principale.
- **Gradul unui nod** – este egal cu numărul valorilor de **1** aflate pe linia nodului respectiv din matricea de adiacență.
- Suma tuturor elementelor din matricea de adiacență este egal cu dublul numărului de muchii

### Liste de adiacență

Se memorează numărul de noduri și pentru fiecare nod în parte se vor memora toate nodurile adiacente cu acel nod.

**Exemplu 5:**




Lista de adiacență

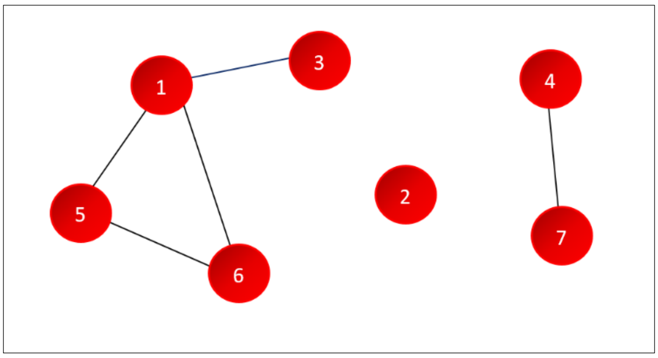
| Nod | Noduri adiacente |
|---|---|
| 1 | 3, 5, 6 |
| 2 | Listă vidă |
| 3 | 1 |
| 4 | 7 |
| 5 | 1, 6 |
| 6 | 1,5 |
| 7 | 4 |

Aceste liste de adiacență fizic se pot reprezenta static(folosind tablouri) sau **dinamic**(folosind listele simplu sau dublu înlănțuite). Reprezentarea statică însă nu este recomandată deoarece numărul de vecini este foarte diferit de la un nod la altul și în acest caz vom utiliza neeficient memoria.

### Liste de muchii

Pot fi implementate **static**, folosind **vectori de structuri**. Fiecare element din acest vector va memora extremitățile fiecărei muchii. Numărul de elemente din acest tablou unidimensional este egal cu numărul de muchii.

**Exemplu 5:**




Lista de muchii

```
struct muchie{
               int x;
               int y;} v[100];
int n,m;
```

| muchie | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1 | 1 | 5 | 4 |
| y | 3 | 5 | 6 | 6 | 7 |

De asemenea mai pot fi utilizate pentru implementarea vectorului de muchii :

- Fie două tablouri unidimensionale pentru a memora extremitățile unei muchii
- Fie alocarea dinamică prin liste de adiacență

Dacă un graf cu n noduri și m muchii este **conex**, numărul maxim de muchii care se pot elimina pentru a obține un graf parțial conex este m-n+1.

**Teorema**: Un graf neorientat conex cu **n noduri** și n-1 muchii este aciclic și maximal în raport cu această proprietate.

Dacă un graf neorientat conex are **n** noduri și **m** muchii, numărul de muchii care trebuie eliminate, pentru a obține un graf parțial conex aciclic, este egal cu **m-n+1 (m –(n-1))**.

Dacă un graf are **n** noduri, **m** muchii și **p** componente conexe, numărul de muchii care trebuie eliminate, pentru a obține un graf parțial aciclic, este egal cu **m – n + p**.

Pentru a obține, dintr-un **graf neorientat conex**, două componente conexe, numărul minim de muchii care trebuie înlăturate **mmin** este egal cu gradul minim din graf.

Numărul maxim de muchii **mmax** dintr-un graf neorientat, cu n noduri și p componente conexe este:

$$m_{max} = \frac{(n-p) * (n-p+1)}{2}$$